

nen wir, daß das metrische Feld im allgemeinen nicht konservativ ist. Lediglich in dem Fall eines statischen metrischen Feldes ( $g_{\alpha\alpha,4} = 0$ ) existiert Energieerhaltung:

$$d(m c^2 + {}^{(\text{elm})}V) = 0, \\ \frac{m_0 \sqrt{-g_{44}}}{\sqrt{1 - c^{-2} (d\tau/dt)^2}} + {}^{(\text{elm})}V = \text{const.} \quad (126)$$

Die bisherigen energetischen Betrachtungen basieren auf der räumlichen Bewegungsgleichung. Die zeitliche Bewegungsgleichung liefert aber, wie eine eingehende Untersuchung zeigt, dieselben Aussagen.

Herrn N. SALIÉ danke ich für interessante Diskussionen.

## Reaktionswärmeleitfähigkeit von Wasserstoff und einfach ionisiertem Helium in einer zylindersymmetrischen Entladung mit überlagertem axialem Magnetfeld\*

Von R. WIENECKE

Institut für Plasmaphysik, Garching bei München  
(Z. Naturforsch. 19 a, 675—679 [1964]; eingegangen am 15. Februar 1964)

Für die Übergänge vom neutralen zum ionisierten Wasserstoff und vom neutralen zum einfach ionisierten Helium wird die Reaktionswärmeleitfähigkeit in einer zylindersymmetrischen Entladung mit überlagertem axialem Magnetfeld berechnet. Berücksichtigt werden muß dabei der radiale Druckgradient, der sich infolge der Diffusion von Ladungsträgern quer zum Magnetfeld ausbildet und in einer früheren Arbeit berechnet worden ist. Die Rechnungen zeigen, daß auch die zur Kontaktleitfähigkeit zu addierende Reaktionswärmeleitfähigkeit durch das Magnetfeld relativ stark beeinflußt wird.

Maschinell berechnete Kurven der Reaktionswärmeleitfähigkeit werden für verschiedene Werte für die magnetische Induktion und den außerhalb der Leitfähigkeitszone vorhandenen Gasdruck wiedergegeben.

In einer zylindersymmetrischen Lichtbogensäule wird unter normalen Bedingungen die dem Plasma zugeführte elektrische Energie ganz überwiegend durch Wärmeleitung in radialer Richtung abgeführt. Hierbei spielt neben der auf der Molekularbewegung beruhenden normalen Wärmeleitfähigkeit die Reaktionswärmeleitfähigkeit eine wichtige Rolle. Sie kommt dadurch zustande, daß die in radialer Richtung sich ausbildenden stationären Diffusionsströme von Elektronen und Ionen nach außen und von neutralen Gasatomen nach innen mit einem Enthalpiestrom verbunden sind. So tragen insbesondere die nach außen diffundierenden Ionen die Ionisierungsenergie des Mutteratoms als potentielle Energie mit sich, die sie bei der Rekombination in kälteren Gebieten in Freiheit setzen, während umgekehrt die nach innen diffundierenden Atome bei ihrer Ionisation dem Plasma mindestens die Ionisierungsenergie entziehen. (Die gleichen Überlegungen gelten naturgemäß auch für das Gebiet der Mehrfachionisation

bzw. der Dissoziation.) Bezeichnet man mit  $v_e$ ,  $v_i$ ,  $v_0$  die Strömungsgeschwindigkeiten von Elektronen, Ionen und Neutralteilchen und mit  $h_e$ ,  $h_i$ ,  $h_0$  die Enthalpien pro Gramm der einzelnen Komponenten, so läßt sich der Energiestrom durch Transport von Reaktionsenergie schreiben:

$$\mathfrak{W}_R = \sum_j p_j h_j v_j = -\kappa_R \cdot \text{grad } T, \\ j = e, i, 0. \quad (1)$$

Hierbei ist vorausgesetzt, daß sich das Gesamtplasma in Ruhe befindet, die Schwerpunktgeschwindigkeit  $\mathfrak{V}$  identisch verschwindet. In Analogie zur normalen Kontaktwärmeleitfähigkeit  $\kappa_K$  nennt man  $\kappa_R$  die Reaktionswärmeleitfähigkeit.

Für den Gesamtenergiestrom gilt dann:

$$\mathfrak{W}_G = -\kappa_G \cdot \text{grad } T = -(\kappa_K + \kappa_R) \cdot \text{grad } T. \quad (2)$$

Überlagert man der Säule des Lichtbogens ein achsenparalleles Magnetfeld, so wird, wie in einer vor-

\* Diese Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen

Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.



angehenden Arbeit<sup>1</sup> beschrieben wurde, die Diffusion der Ladungsträger nach außen zunächst gehemmt, während die Neutralteilchen nach innen ungehemmt weiter diffundieren können. Es kommt zu einem Druckanstieg in der Umgebung der Achse der Entladung, bis wieder die nach innen und außen gerichteten Massenströme gleich werden. Die Geschwindigkeiten der einzelnen Massenströme können sich aber trotzdem verändert haben, so daß sich andere Werte für die Reaktionswärmeleitfähigkeit ergeben werden. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die Reaktionswärmeleitfähigkeit in einem teilweise ionisierten Wasserstoff- und Heliumplasma in Abhängigkeit vom Außendruck und vom überlagerten Magnetfeld zu berechnen. Dabei werden die Bezeichnungen und Ergebnisse der vorangehenden Arbeit zugrunde gelegt.

### I. Allgemeine Berechnung der Reaktionswärmeleitfähigkeit

Für die Enthalpien der einzelnen Komponenten kann man schreiben:

$$h_e = \frac{5}{2} \frac{k T}{m_e},$$

$$h_i = \frac{5}{2} \frac{k T}{m_0} + \frac{E_i}{m_0} + \frac{D}{2 m_0},$$

$$E_i = \text{Ionisierungsenergie des Atoms,} \quad (3)$$

$$h_0 = \frac{5}{2} \frac{k T}{m_0} + \frac{D}{2 m_0},$$

$$D = \text{Dissoziationsenergie des Moleküls.}$$

Vernachlässigt worden sind die Beiträge der inneren Zustände zur Enthalpie, was bei Atomen und Ionen fast immer gestattet ist. Unter Annahme von Quasineutralität ( $n_i = n_e$ ) und der Bedingung, daß keine radialen Ströme fließen dürfen:

$$\text{d. h.} \quad j_r = n_i e (v_{ir} - v_{er}) = 0, \quad (4)$$

$$v_{ir} = v_{er} = v_{Lr}$$

ist mit Gl. (3):

$$\mathfrak{B}_r = (5 k T + E_i + \frac{1}{2} D) n_i v_{Lr} + (\frac{5}{2} k T + \frac{1}{2} D) n_0 v_{0r}. \quad (5)$$

Da die Schwerpunktgeschwindigkeit verschwinden soll, gilt

$$Q v_r = 0 = Q_e v_{er} + Q_i v_{ir} + Q_0 v_{0r} = n_i (m_i + m_e) v_{Lr} + n_0 m_0 v_{0r} \quad (6)$$

$$\text{oder mit } m_i + m_e = m_0$$

$$n_0 v_{0r} = -n_i v_{Lr}. \quad (6a)$$

Damit wird

$$\mathfrak{B}_r = (\frac{5}{2} k T + E_i) n_i v_{Lr} = -\kappa_R \text{grad}_r T. \quad (5a)$$

In [I, Gl. (20)] war abgeleitet worden:

$$n_i v_{Lr} = \frac{1}{(n_0 + n_i)} (\varepsilon_{i0} + \varepsilon_{e0}) \left\{ \frac{j}{e} \left( \varepsilon_{e0} - \frac{m_e}{m_i} \varepsilon_{i0} \right) n_0 + \text{grad } p_0 \right\}$$

Bildet man hiervon die  $r$ -Komponente, so ist mit  $j_r = 0$

$$n_i v_{Lr} = \frac{1}{(n_0 + n_i)} (\varepsilon_{i0} + \varepsilon_{e0}) \text{grad}_r p_0. \quad (7a)$$

$$\text{Mit Gl. (I, 25):} \quad (I, 25) \quad \text{grad } p_0 = \frac{p_0}{p_i + p_0} \text{grad } p - \frac{p_0^2}{p_i (p_i + p_0)} \frac{dS}{dT} \cdot \text{grad } T$$

$$\text{und} \quad (I, 26) \quad \text{grad}_r p = \frac{n_0^2 e^2 B_z^2 (dS/dT) \text{grad}_r T}{n_i (n_0 + n_i)^2 [n_i \varepsilon_{ie} (\varepsilon_{i0} + \varepsilon_{e0}) + n_0 \varepsilon_{i0} \varepsilon_{e0}] + n_i n_0 e^2 B_z^2}$$

erhält man für  $n_i v_{Lr}$  den Ausdruck:

$$n_i v_{Lr} = \frac{k T}{(p_i + p_0) (\varepsilon_{i0} + \varepsilon_{e0})} \frac{p_0^2}{p_i} \frac{dS}{dT} \frac{dT}{dr} \quad (7b)$$

mit

$$A = \frac{e^2 B_z^2}{(p_0 + p_i) [(p_i \varepsilon_{ie} (\varepsilon_{i0} + \varepsilon_{e0}) + p_0 \varepsilon_{i0} \varepsilon_{e0})]}. \quad (8)$$

Damit kann man für  $\mathfrak{B}_r$  schreiben:

$$\mathfrak{B}_r = - \frac{(\frac{5}{2} k T + E_i) k T}{(p_i + p_0) (\varepsilon_{i0} + \varepsilon_{e0})} \frac{p_0^2}{p_i} \frac{dS}{dT} \frac{dT}{dr} \quad (5b)$$

oder

$$\kappa_r = \frac{(\frac{5}{2} k T + E_i) k T}{(p_i + p_0) (\varepsilon_{i0} + \varepsilon_{e0})} \frac{p_0^2}{p_i} \frac{dS}{dT} \quad (9)$$

Direkt kommt der Einfluß des Magnetfeldes nur im Ausdruck  $A$  zur Wirkung. Man muß aber berücksichtigen, daß durch das Magnetfeld der Gesamt-

<sup>1</sup> R. WIENECKE, Z. Naturforschg. **18 a**, 1151 [1963].

druck  $p$  mit wachsender Temperatur ansteigt und dadurch auch die Partialdrücke  $p_0$  und  $p_i$  verändert werden. Daneben nimmt bei festgehaltener Temperatur der Ionisationsgrad mit wachsendem Druck ab und damit das Verhältnis  $p_0/p_i$  entsprechend zu. Dies zeigt schon, daß die Verhältnisse recht kompliziert und verwickelt sind und eine einfache Deutung der Wirkung des Magnetfeldes nicht möglich ist. Zu bemerken ist noch, daß die so bestimmte Reaktionswärmeleitfähigkeit nicht nur von der Temperatur und dem angelegten magnetischen Feld, sondern auch noch vom Außendruck  $p_A$  (außerhalb der Leitfähigkeitszone) abhängt.

## II. Berechnung der Reaktionswärmeleitfähigkeit bei Wasserstoff

Zur Bestimmung von  $\kappa_R$  bei Wasserstoff wurden mit Hilfe der in I berechneten Abhängigkeit des Gesamtdruckes von der Temperatur bei gegebenen Werten für den Außendruck  $p_A$  und die angelegte magnetische Induktion  $B_A$  die Partialdrücke  $p_i$  und  $p_0$  in Abhängigkeit von  $T$  bestimmt. Die Ionisationsenergie  $E_i$  wurde mit  $E_i = 13,54$  eV berücksichtigt.

Für die Reibungskoeffizienten  $\varepsilon_{jK}$  wurden die gleichen Ausdrücke wie in (1) benutzt. Als Wirkungsquerschnitte wurden verwandt:

$$Q_{ie} = \frac{e^4}{(kT)^2} \ln \frac{kT}{e^2 n_e^{1/3}} = \frac{2,78 \cdot 10^{-6}}{T^2} \ln \frac{(kT)^{4/3}}{e^2 \cdot p_e^{1/3}} \text{ cm}^2,$$

$$Q_{i0} = 70 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2,$$

$$Q_{e0} = 120 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2.$$

Mit  $\frac{dS}{dT} = \frac{S}{T} \left( \frac{5}{2} + \frac{E_i}{kT} \right)$  sind die in den Abb. 1–4 berechneten Reaktionswärmeleitfähigkeiten berechnet worden.

Abb. 1 gibt für verschiedene Außendrucke und einer magnetischen Induktion von 10 kT die Abhängigkeit von  $\kappa_R$  mit der Temperatur wieder. Bei hohen Drucken (Abb. 1) sieht man kaum einen Einfluß von  $B$  auf den Absolutwert von  $\kappa_R$ . Daß die Maxima sich mit steigendem Druck zu höheren Temperaturen verschieben, hängt mit der Abhängigkeit des Ionisierungsgrades  $\alpha$  vom Druck zusammen. Das Maximum von  $\kappa_R$  wird dort etwa erreicht, wo die Änderung von  $\alpha$  mit der Temperatur maximal ist. Im Druckbereich zwischen  $5 \cdot 10^3$  und  $5 \cdot 10^4$  dyn  $\text{cm}^{-2}$  ist ein deutlicher Einfluß von  $B$  auf die Abso-

lutwerte festzustellen. Daß die Maxima von  $\kappa_R$  für kleinere Drücke hier bei höheren Temperaturen liegen — in Abb. 2 ist es gerade umgekehrt —, kommt

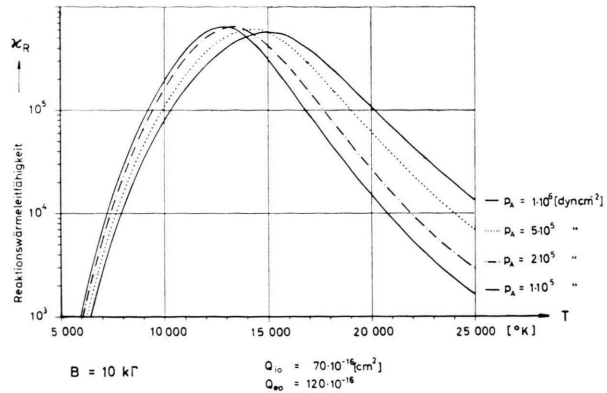


Abb. 1. Reaktionswärmeleitfähigkeit von Wasserstoff bei einem Magnetfeld von 10 kGauß.

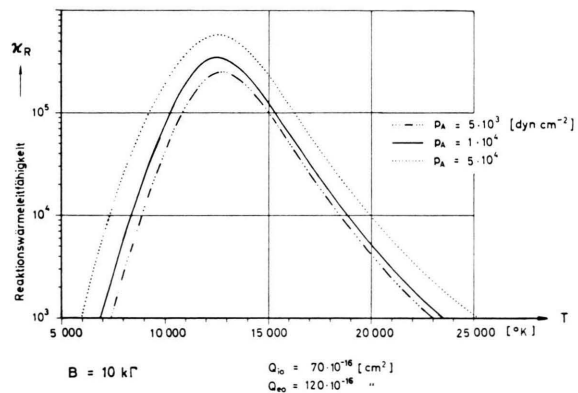


Abb. 2. Reaktionswärmeleitfähigkeit von Wasserstoff bei einem Magnetfeld von 10 kGauß.

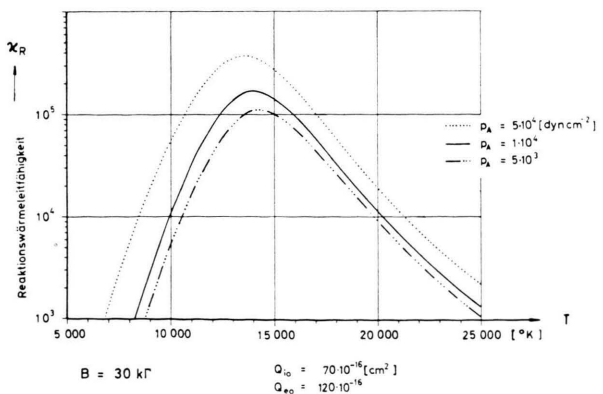


Abb. 3. Reaktionswärmeleitfähigkeit von Wasserstoff bei einem Magnetfeld von 30 kGauß.

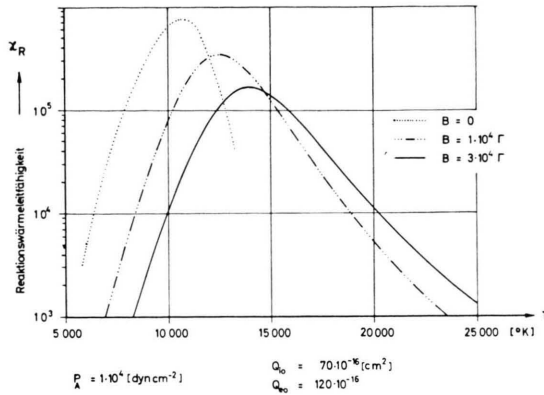


Abb. 4. Reaktionswärmeleitfähigkeit von Wasserstoff bei einem Außendruck  $p_A = 1 \cdot 10^4$  dyn/cm<sup>2</sup> für verschiedene magnetische Induktionen.

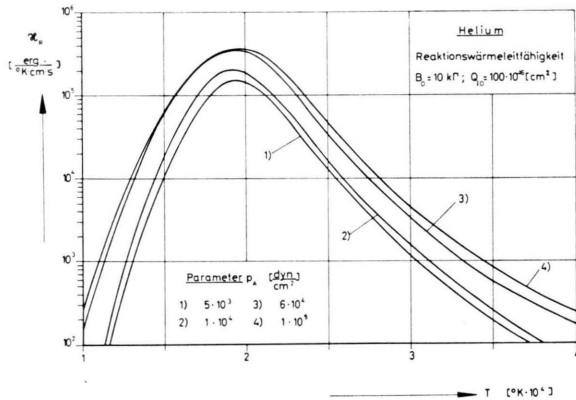


Abb. 5. Reaktionswärmeleitfähigkeit des einfach ionisierten Heliums bei einem Magnetfeld von 10 kGauß.

durch den Druckanstieg im Magnetfeld zustande. ( $p_A$  gibt hier nur den Druck außerhalb des Leitfähigkeitsbereiches an.)

In Abb. 3 sind für die gleichen Außendrucke die  $z_R$  gegen  $T$  aufgetragen. Allerdings beträgt hier die magnetische Induktion  $B = 30$  kT. Qualitativ findet man das gleiche Verhalten wie in Abb. 1. Die Absolutwerte sind jedoch für gleiches  $p_A$  niedriger. Dies ist besonders gut in Abb. 4 zu sehen, wo für den Außendruck  $p_A = 1 \cdot 10^4$  dyn/cm<sup>2</sup>  $z_R$  über  $T$  für verschiedene magnetische Induktionen aufgetragen ist. Man sieht deutlich den Einfluß von  $B$  auf  $z_R$ , der jedoch nicht so hoch ist wie ursprünglich erwartet wurde.

### III. Berechnung der Reaktionswärmeleitfähigkeit des einfach ionisierten Heliums

Die gleichen Rechnungen wie für Wasserstoff wurden für das einfach ionisierte Helium durchgeführt.

Als Wirkungsquerschnitte wurden hier benutzt:

$$Q_{ie} = \frac{e^4}{(kT)^2} \ln \frac{kT}{e^2 n e^{1/3}} = \frac{2,78}{T^2} \ln \frac{(kT)^{4/3}}{e^2 p e^{1/3}} \text{ cm}^2,$$

$$Q_{e0} = 5 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2, \quad Q_{i0} = 100 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^2.$$

In Abb. 5 ist die Reaktionswärmeleitfähigkeit für ein Magnetfeld von 10 kT für die Außendrucke  $p_A = 5 \cdot 10^3$ ,  $1 \cdot 10^4$ ,  $6 \cdot 10^4$  und  $1 \cdot 10^5$  dyn/cm<sup>2</sup> wiedergegeben.

In Abb. 6 ist  $z_R$  für dieselben Außendrucke bei einem Magnetfeld von 30 kT dargestellt. Man sieht in beiden Darstellungen, daß die Reaktionswärmeleitfähigkeit bei festem Magnetfeld mit fallendem Druck abnimmt. Die dabei auftretende Verschiebung des Maximums zu höheren Temperaturen wird auch hier durch den sich ausbildenden Druckanstieg hervorgerufen.

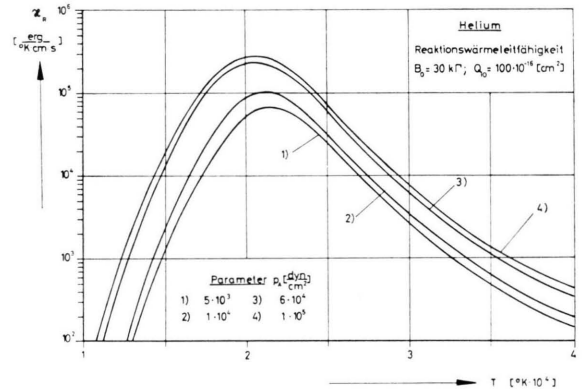


Abb. 6. Reaktionswärmeleitfähigkeit des einfach ionisierten Heliums bei einem Magnetfeld von 30 kGauß.

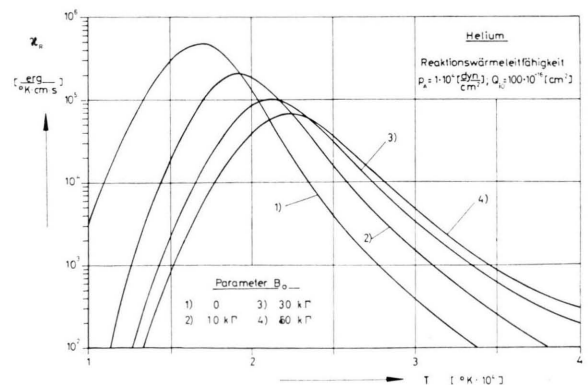


Abb. 7. Reaktionswärmeleitfähigkeit des einfach ionisierten Heliums bei einem Außendruck  $p_A = 1 \cdot 10^4$  dyn/cm<sup>2</sup> bei verschiedenen Magnetfeldern.

In Abb. 7 ist für den Außendruck  $p_A = 1 \cdot 10^4$  dyn/cm<sup>2</sup> die Reaktionswärmeleitfähigkeit für verschiedene Magnetfelder über der Temperatur aufgetragen. Man sieht hier einen starken Einfluß von  $B$ . Bei einer Induktion von 50 kT ist das Maximum von  $\kappa_R$  um fast eine Zehnerpotenz niedriger als bei  $B = 0$ .

Abschließend soll noch bemerkt werden, daß alle hier durchgeführten Überlegungen und Rechnungen

nur gültig sind für den Fall lokalen thermischen Gleichgewichtes. Insbesondere ist vorausgesetzt, daß die SAHA-Gleichung für die Berechnung des Ionisationsgrades gültig ist. Es ist daher bei praktischer Benutzung der hier mitgeteilten Rechnungen stets eine Prüfung notwendig, ob die gemachten Voraussetzungen wirklich erfüllt sind. Falls die Abweichungen vom „SAHA-Gleichgewicht“ nicht sehr groß sind, dürften die ermittelten Werte für die Reaktionswärmeleitfähigkeit eine gute Näherung bedeuten.

## Zum Zündmechanismus einer Theta-Pinch-Entladung

Von R. CHODURA

Institut für Plasmaphysik, Garching b. München \*

(Z. Naturforschg. **19 a**, 679—690 [1964]; eingegangen am 13. Februar 1964)

In der folgenden Arbeit werden die Vorgänge bei der Ionisation durch Elektronenstoß im zeitlich veränderlichen Magnetfeld  $B_z(t)$  einer Thetapinch-Spule diskutiert. Diese Vorgänge sind stark abhängig von der im Gas bereits vorhandenen Ladungsträgerdichte. Bei geringer Ladungsträgerdichte ist das elektrische Feld nicht rotationssymmetrisch, und die Ionisation ist hauptsächlich auf die Umgebung des Spulenschlitzes (Stromzuführung) beschränkt.

Von einer gewissen Ladungsträgerdichte an werden äußere elektrische Potentialfelder abgeschirmt, gleichzeitig werden aber infolge ungleicher Bewegung von Elektronen und Ionen innere Raumladungsfelder erzeugt. Es wird versucht, eine annähernde, selbstkonsistente Beschreibung dieser Bewegung zu geben. Bei starker Kopplung von Ionen- und Elektronenbewegung (Quasineutralität) bewegen sich Elektronen und Ionen in radialer Richtung so, als hätten sie beide die gleiche Masse von der Größe des geometrischen Mittels aus Ionen- und Elektronenmasse,  $m = (m_i m_e)^{1/2}$ .

Die Elektronenenergie  $W$  wird charakterisiert durch die Größe  $\mu = W/B_z$ . Bei linearer Veränderung von  $B_z$  mit der Zeit,  $B_z \sim t$ , ist  $\mu$  für  $|t| \gg (m_i m_e)^{1/4} / e \dot{B}_z^{1/2}$  eine periodische Funktion in  $t^2$ . Ihr Maximalwert  $\mu_{\max}$  für ein Elektron, das zur Zeit  $t_0$  losläuft, ist gleich dem  $(m_i/m_e)^{1/4}$ -fachen des Wertes von  $\mu$  eines freien Elektrons, das zur Zeit  $(m_e/m_i)^{1/4} t_0$  seine Bewegung am gleichen Ort  $r_0$  begonnen hat. Für  $|t_0| \gg (m_i m_e)^{1/4} / e \dot{B}_z^{1/2}$  ist insbesondere

$$\mu_{\max} = \frac{1}{2} m_i v_D^2(r_0, t_0) / |B_z(t_0)|, \quad v_D = E_\phi / B_z(t_0) = \frac{1}{2} r_0 \dot{B}_z / B_z(t_0),$$

d. h. ein Elektron gewinnt in seiner ersten Bewegungsperiode eine Maximalenergie  $W_{\max}$  von der Größe der Ionendriftenergie.

Auf Grund dieser Ergebnisse werden Schranken dafür angegeben, wie lange bei einem beliebigen Verlauf von  $B_z(t)$  Ionisation möglich ist. Diese Schranken geben den experimentell gefundenen Streubereich der Zündzeitpunkte beim Thetapinch gut wieder. Es wird auch der Fall diskutiert, daß an Stelle des Wirbelfeldes  $E_\phi = \frac{1}{2} r \dot{B}_z$  ein statisches elektrisches Feld angelegt wird und  $B = \text{const}$  ist. Die in diesem Fall, z. B. bei rotierenden Plasmen und ähnlichen Anordnungen beobachtete kritische Geschwindigkeit  $v_c = (2 W_i / m_i)^{1/2}$  ( $W_i$  = Ionisationsenergie des verwendeten Gases) könnte sich vielleicht durch die oben beschriebene Grenzenergie  $W_{\max}$  eines Elektrons in einem solchen Feld erklären lassen.

Beim Betrieb einer  $\Theta$ -Pinch-Entladung mit einem Spulenstrom, der im Verlauf der Entladung mehrmals sein Vorzeichen ändert, nehmen die zeitlichen und örtlichen Bereiche um die Nullstelle des Magnetfeldes eine gewisse Sonderstellung ein. Einerseits hört hier die einschließende Wirkung des Magnetfeldes

wegen der großen Gyrationenradien der Teilchen auf, andererseits gilt nicht mehr die adiabatische Invarianz des magnetischen Moments.

Es soll hier das Verhalten geladener Teilchen für einen einfachen Fall des Nulldurchgangs des Magnetfeldes beschrieben werden, nämlich für den Nulldurchgang vor der eigentlichen Zündung des Gases in der  $\Theta$ -Pinch-Spule. Es soll weiter versucht werden, den Zündvorgang selbst etwas besser zu verstehen, um den Einfluß äußerer Änderungen, z. B.

\* Die nachstehende Arbeit wurde im Rahmen des Vertrages zwischen dem Institut für Plasmaphysik GmbH und der Europäischen Atomgemeinschaft über die Zusammenarbeit auf dem Gebiete der Plasmaphysik durchgeführt.